

Spis treści

Wstęp	7
1. Podstawowe struktury algebraiczne	9
2. Przestrzeń liniowa	20
3. Przekształcenia liniowe	34
4. Macierze	45
5. Równania liniowe.....	59
6. Wyznacznik macierzy i macierz odwrotna.....	70
Skorowidz nazw	85
Skorowidz symboli	86
Spis rysunków	87

Wstęp

Reformy programów nauczania, które miały miejsce w pierwszej dekadzie XXI wieku, spowodowały, że praktycznie na wszystkich kierunkach ekonomicznych matematyka wykładana była w różnej liczbie godzin. Często dotyczyło to nawet kursów o takiej samej zawartości merytorycznej. Chcąc sprostać ograniczonym wymaganiom czasowym, w wykładzie zredukowano te elementy, których przyswojenie sprawia słuchaczom najmniej kłopotów. W takiej sytuacji wybór zwykle padał na część związaną z elementami algebry liniowej. W efekcie tego bardzo często dochodziło do znacznych uproszczeń przekazywanych treści, a problemy algebraiczne sprowadzano do elementarnego rachunku macierzowego, co nie stało w sprzeczności ze standardami kształcenia obowiązującymi do czasu nowelizacji w 2011 r. ustawy *Prawo o szkolnictwie wyższym*. Aktualnie standardy już nie obowiązują, jednak w wielu przypadkach ograniczenia wprowadzone przez ustalenie minimalnej liczby godzin na realizację poszczególnych przedmiotów, które wskazywane były w standardach, w dalszym ciągu wyznaczają ramy czasowe poszczególnych kursów.

W prezentowanym podręczniku dokonano próby przedstawienia problematyki dotyczącej algebry liniowej wykładanej na studiach ekonomicznych w postaci zwanego kursu dostosowanego do współczesnych realiów akademickich. Z jednej strony przedstawiono wszystkie elementy potrzebne w realizacji innych przedmiotów, a z drugiej zadbano o dostosowanie objętości do wymagań czasowych aktualnie obowiązujących programów kształcenia. Konsekwencją tego jest zamieszczenie dużej liczby ćwiczeń przeznaczonych do samodzielnego rozwiązania. Wiele z nich oprócz funkcji ćwiczeniowej spełnia także funkcję uzupełniającą w stosunku do prezentowanego tekstu głównego. Z tego powodu istotne jest ich rozwiązywanie, gdyż pominięcie może powodować trudności ze zrozumieniem dalszej części kursu.

Obecnie w programach studiów ekonomicznych kurs algebry liniowej występuje jako samodzielny przedmiot wykładany np. na kierunku analityka gospodarcza w wymiarze 45 godzin, a także jako element większego wykładu, jak choćby matematyka czy zastosowania metod ilościowych w ekonomii. W takich przypadkach zakres materiału i liczba godzin przeznaczona na tę część są zazwyczaj mniejsze. Rodzi to zapotrzebowanie na różne w zakresie treści opracowania dotyczące elementów algebry liniowej. Prezentowany podręcznik wychodzi naprzeciw temu zapotrzebowaniu. Jego konstrukcja umożliwia realizację zawężonego kursu od definicji 2.1a. bez szkody dla zrozumienia dalszej części wykładu.

Chęć zamknięcia rozważań w publikacji o możliwie małej objętości spowodowała celowe pominięcie przykładów wskazujących ekonomiczne zastosowania prezentowanych treści. Jest to o tyle uzasadnione, że kurs algebry liniowej z reguły rozpoczy-

na się już w pierwszym semestrze studiów, kiedy słuchacze nie mają wystarczającej wiedzy, aby przedstawiać im zagadnienia ekonomiczne, w których wykorzystywane są narzędzia algebraiczne. Zrezygnowano także z klasycznej dla opracowań matematycznych formy przedstawiania zagadnień polegającej na przytaczaniu definicji, twierdzeń oraz ich dowodów. Zamiast tego zaproponowano zwięzłą narrację, która w przypadku części uzasadnianych twierdzeń prowadzi do ich zauważenia jeszcze przed formalnym sformułowaniem. Ograniczono się w tym zakresie do uzasadnień efektywnych, mających implikacje obliczeniowe, bądź pojęciowo istotnych w prezentacji kolejnych partii kursu. W związku z tym w tekście znajdują się także twierdzenia przytoczone bez podania ich dowodu. Świadomie pominięto także część o charakterze zbioru zadań dodatkowych przeznaczonych do samodzielnego rozwiązania. Jest to konsekwencją równoległego opracowania drugiej części podręcznika, która jest zbiorem przykładowych ćwiczeń rozwiązanych z wykorzystaniem programu Matlab.

Treść podręcznika została podzielona na sześć rozdziałów będących jednocześnie w zamyśle jednostkami dydaktycznymi. W pierwszym zdefiniowano pojęcie działania, podano przykłady działań, a także wskazano podstawowe struktury rozpatrywane w algebrze. W drugim zawężono rozważania do podstawowej, z perspektywy dalszego kursu, struktury, a mianowicie przestrzeni liniowej. Wprowadzono pojęcie liniowej niezależności wektorów i bazy przestrzeni liniowej. Trzeci rozdział poświęcono opisowi własności algebraicznych przekształceń liniowych. Zdefiniowano także pojęcie izomorfizmu, dzięki któremu można dokonywać algebraicznego utożsamienia struktur. W rozdziale czwartym zdefiniowano pojęcie macierzy, a następnie w zbiorze macierzy określono działania, wskazano ich własności oraz w konsekwencji zauważono, jakie struktury algebraiczne tworzą one z tymi działaniami. W tym rozdziale dokonano także izomorficznego utożsamienia zbioru przekształceń liniowych i zbioru macierzy. Kluczowym rozdziałem jest rozdział piąty, w którym sformułowano i rozwiązano problem istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania liniowego. Przedstawiono w nim także bardzo istotną z praktycznego punktu widzenia procedurę eliminacji Gaussa rozwiązywania układów równań. W zamykającym podręcznik rozdziale szóstym zdefiniowano pojęcie wyznacznika, zastosowano je do wyodrębnienia multiplikatywnej grupy macierzy nieosobliwych i zaprezentowano twierdzenia umożliwiające wskazanie innych niż metoda eliminacji Gaussa metod rozwiązywania równań Cramera.

Chciałbym wyrazić wdzięczność profesorowi Andrzejowi Miształowi, którego cenne wskazówki pozwoliły na uniknięcie wielu błędów, a także podziękować pani Elżbiecie Szlachcic za zaangażowanie i trud włożony w opracowanie tekstu.